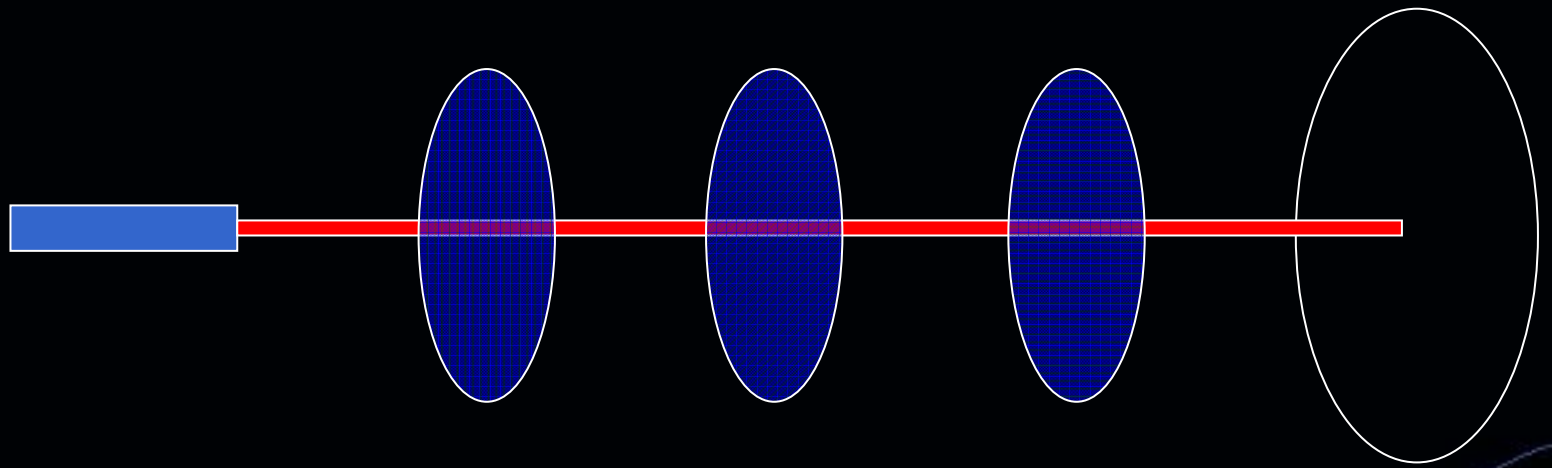
Quantum computing

Libor Váša

Outline

- Zvláštní chování fyziky
  - Kvantové jevy, polarizace etc.
- Abstrakce quantum computing
  - PTM vs. QTM
  - Hilbertovy prostory
  - Qubit
  - Kvantový registr
  - Kvantová logika
- Kvantové algoritmy
- Kvanatové šifry

Experiment s polarizací fotonů



100%
50%
0%
12,5%

Zvláštní chování fyziky

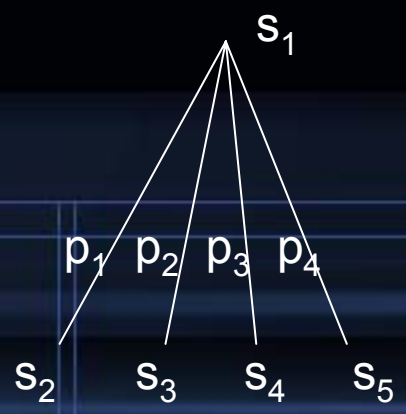
- rozměrová úroveň elementárních částic
- rezignujeme na otázku „proč?“ a „jak to?“
- odpovídáme na otázku „jak?“
- pouze snaha předpovědět chování systému
- pouze pravděpodobnostní předpovědi

Quantum computing

- pohled na „počítač“ jako na „stroj s předpověditelným výsledkem“
- z tohoto hlediska je počítačem téměř cokoli co se dá nějak popsat
- idea – miniaturizovat
- využít toho že kvantová mechanika je popsána
- náznaky ideje – R. Feynman
- dodnes téměř výhradně teoretický obor

PTM a QTM

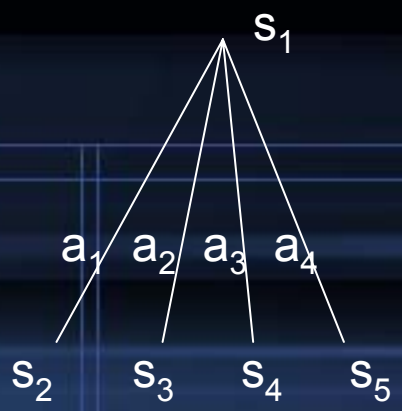
- Probabilistic Turing Machine
- přiřazuje pravděpodobnosti přechodům mezi stavy
- suma pravděpodobností přechodu z jednoho konkrétního stavu musí být 1 (lokální podmínka)



- stav ve stromu nastane s pravděpodobností rovnou násobku pravděpodobností všech větví od kořene
- suma pravděpodobností stavů na jedné úrovni stromu musí být rovna jedné (globální podmínka, splněna automaticky s lokální podmínkou)
- PTM je možno popsat maticí pravděpodobností přechodů

Quantum Turing Machine

- Popisují chování kvantového systému
- Každému stavovému přechodu je přiřazena komplexní amplituda
- Každému stavu ve stromu je přiřazena komplexní amplituda určená jako násobek všech amplitud přechodů od kořene
- Pravděpodobnost stavu ve stromu se určí jako druhá mocnina velikosti amplitudy daného stavu



$p_1=|a_1|^2$
$p_2=|a_2|^2$
$p_3=|a_3|^2$
$p_4=|a_4|^2$

QTM

- konkrétní stav se na některé úrovni stromu může vyskytnout několikrát
- v takovém případě se amplituda takového stavu určí jako suma amplitud jednotlivých výskytů
- amplituda je komplexní -> stavy mohou interferovat
- konstruktivní interference
  - shodná orientace amplitud
- destruktivní interference
  - opačná orientace amplitud
  - může vést až k tomu že pravděpodobnost daného stavu je nulová (pouze na dané úrovni stromu)

QTM

- lokální podmínka (jsme-li někde pak musíme někam jít)

$$|a_1|^2+|a_2|^2+\ldots+|a_k|^2 = 1$$

pro přechody z jednoho konkrétního stavu

- globální podmínka (vždycky musíme někde být)

$$p_1+p_2+\ldots+p_k=1$$

pro všechny stavy na jedné úrovni stromu

- platnost globální podmínky nevyplývá z platnosti lokální podmínky

QTM

- QTM je možno popsat přechodovou maticí
- euklidovská norma všech sloupců je rovna jedné (lokální podmínka)
- matice je *unitární*

$$MM^*=M^*M=I$$

kde M^* je matice konjugovaná transponovaná

- (lze odvodit, netriviální)
- implikuje reverzibilitu

QTM

- práci QTM nelze pozorovat
- QTM prochází všechny možnosti (exponenciální počet)
- z QTM je obtížné získat výsledek
- měření
  - dotaz na jeden konkrétní stav
  - kladná odpověď s danou pravděpodobností
  - dotaz nevratně zničí konfiguraci QTM

Hilbertovy prostory

- abstrakce popisující stavy a chování kvantových systémů
- vektorový prostor se zavedenou operací součinu (tzv.inner product, výsledek je komplexní číslo)
- musí navíc být tzv. complete
  - odvození této podmínky netriviální
  - bez vlivu na další úvahy

vektor v prostoru ≅ stav systému

výsledek součinu v1 a v2 ≅ amplituda že za předpokladu že systém je ve stavu v2 je zároveň ve stavu v1

Bra-ket

- každému stavu kvanotvého systému odpovídá jeden bra- vektor a jeden -ket vektor
  - bra vektor: <x|
  - ket vektor: |x>
- obdoba řádkového a sloupcového vektoru
- inner product je násobek bra- -ket

  <x||y>

  zapisuje se <x|y>

Báze stavového prostoru QS

- pro každý „pure“ stav x platí

$$\langle x|x\rangle = 1$$

- pro některé dvojice stavů x y může platit

$$\langle x|y\rangle = 0$$

- Hledejme největší množiny stavů jejichž vzájemný inner product je nulový
  - kardinalita takových množin je pro daný QS konstantní (tak je chová fyzika)
  - takové množiny se chovají jako ortonormální báze Hilbertova prostoru příslušejícího danému systému (model se chová stejně, proto byl také vybrán)

Ekvivalence QS a HS

- důsledky:
  - zvolme nějakou bázi HS
    - jakýkoli stav |x> je možno vyjádřit jako

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i |b_i\rangle$$

    - kde a_i jsou komplexní kombinační koeficienty a b_i jsou bázové vektory HS dimenze n
    - Inner product je možno vyjádřit jako

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

kde a_i jsou kombinační koeficienty stavu x a b_i jsou kombinační koeficienty stavu y

Qubit

- kvantový systém ekvivalentní dvourozměrnému HS
- někdy ve významu „stav kvantového systému…“
- označme nějakou ortonormální bázi HS |0> a |1>, pak stav qubitu je možno vyjádřit jako

$$|s\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle,\ |a|^2+|b|^2=1$$

kde *a*, *b* jsou komplexní čísla

- qubit nese neomezené množství informace, není ale možné ji extrahovat

Měření v abstrakci HS

- měření je operace nad systémem jejímž parametrem je tzv. measurable
- measurable je ortonormální báze HS (nebo úplná množina jejích disjunktních podmnožin)
- operace měření zahrnuje následující děje:
  - určení amplitudy stavu systému vzhledem k measurable (inner product)
  - „náhodná“ volba některé ze složek measurable (určená amplitudami)
  - projekce stavu systému do zvolené složky measurable (systém je změněn)
  - do „makrosvěta“ se dostane informace o tom která ze složek measurable byla zvolena

Vývoj QS

- lze vyjádřit jako operátor nad příslušným HS
- základní otázka: jaká je amplituda stavu Y za předpokladu že systém prošel vývojem A a původně se nacházel ve stavu X?

$$\langle Y|A|X \rangle$$

- v zavedené notaci HS a vzhledem k dané bázi lze A vyjádřit jako unitární matici
- unitární matice je v zásadě matice rotace (vektory si zachovávají délku)

Reverzibilita

$$\langle Ax \mid Ax \rangle = \langle x \mid x \rangle = 1$$

$$\langle x \mid x \rangle = \langle A^* Ax \mid x \rangle$$

$$A^* A = I$$

$$Ax = y \Rightarrow A^* y = x$$

- Každý QS je tedy reverzibilní (existuje operace, která z výsledků odvodí argumenty)
- Žádná informace nemůže zmizet (to je dobře, protože mazání informací spotřebovává energii)

Kompozice QS

- kompozice klasických systémů se chová jako kartézský součin
- dimenze klasického složeného systému je

$$d(x+y) = d(x)+d(y)$$

- kompozice QS se chová jako tenzorový součin
- Dimenze složeného qs je

$$d(x+y) = d(x)*d(y)$$

Kvantový registr

- složen z qubitů
- stavový prostor se chová jako tenzorový součin

$$U \otimes V = \{u_0, u_1\} \otimes \{v_0, v_1\} = \{u_0 v_0, u_0 v_1, u_1 v_0, u_1 v_1\}$$

$$U \otimes V \otimes W = \{u_0, u_1\} \otimes \{v_0, v_1\} \otimes \{w_0, w_1\} = \begin{Bmatrix} u_0 v_0 w_0, u_0 v_0 w_1, u_0 v_1 w_0, u_0 v_1 w_1, \\ u_1 v_0 w_0, u_1 v_0 w_1, u_1 v_1 w_0, u_1 v_1 w_1, \end{Bmatrix}$$

- (pokud qubit je „trochu jednička a trochu nula“ pak kvantový registr je „trochu od každé možné kombinace bitů, trochu nula, trochu jednička, trochu dvojka, trochu trojka, …“)

Kvantový registr

- jednotlivé složky jsou těsněji vázané než u klasického registru
- obsah informace je větší než v jednotlivých složkách dohromady
- stavový prostor roste exponenciálně
  - pro popsání stavu stoqubitového registru je potřeba 2^{100}=1267650600228229401496703205376 komplexních čísel
  - kvantové registry (a kvantové počítače obecně) se „obtížně“ simulují klasickou výpočetní technikou
  - Současný hardware „naštěstí“ umožňuje max. 3qb

Quantum entanglement

- jeden z nejdůležitějších jevů QC
- báze kombinace Hilbertových prostorů je tenzorový součin bází složek
- tenzorový součin stavů složek je stav kompozice HS

ale nejen to!

Entangled state

$$(a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) = (ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle)$$

$$(a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) = (e|00\rangle + f|01\rangle + g|10\rangle + h|11\rangle)$$

$$ac = e, ad = f, bc = g, bd = h$$

$$e = h = 0,\ f = g = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- stav $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ nelze vyjádřit jako tenzorový součin stavů podsystémů

- má takový stav fyzikální smysl?

Ano.

- jedná se o tzv. entangled state (vázaný stav)
- pokud např. stav |0> vyjadřuje spin up a stav |1> vyjadřuje spin down, pak komponovaným stavem je popsán systém dvou částic opačného (ale obecně neznámého) spinu, což je ve fyzice běžné
- „vázaný“ se stav nazývá proto, že nese menší množství informace
- zde uvedený stav je tzv. maximálně vázaný – nese tolik informace jako každý subsystém (změřením jednoho qubitu získáme také plnou informaci o druhém)
- každý vázaný stav dvou qubitového registru se dá při vhodné volbě bází zapsat jako

$$\left|\Phi\right\rangle = \cos\varphi\left|00\right\rangle + \sin\varphi\left|11\right\rangle$$

Paradoxy vázaných stavů

- změřením jednoho qubitu vázaného stavu se automaticky „změří“ a tudíž promítne i druhý (ačkoli mohou být libovolně daleko)
- bohužel nelze využít ke komunikaci (nemůžeme zjistit jestli je qubit promítnutý)
- lze využít k jiným účelům (šifrování, dense coding)
- vázané stavy jsou skutečnou příčinou nesimulovatelnosti kvantového počítače (kvantový počítač se chová nelokálně)

Quantum gates

- vývoj QS = operace nad QS
- operace = brána (gate)
- obdoba klasických logických hradel
- musí splňovat podmínky pro QS
  - unitární matice
  - reverzibilita

- kvantový výpočet – série vývojů QS

Klonovati nemožno (no cloning)

- problém: *Je možno vytvořit kopii kvantového stavu aniž by byl tímto procesem zničen*?
  - (to by se hodilo, protože bychom mohli přesněji určit v jakém stavu vlastně částice je)
- Matematicky: existuje binární unitární transformace (gate) U taková, že platí

U(|a0>)=|aa>

?

- Dejme tomu že by existovala. Pak:

$$U(|a0\rangle)=|aa\rangle, U(|b0\rangle)=|bb\rangle$$

$$c=\frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle+|b\rangle), U(|c0\rangle)=|cc\rangle$$

$$|c0\rangle=|c\rangle\otimes|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|a0\rangle+|b0\rangle)$$

$$U(|c0\rangle)=U\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|a0\rangle+|b0\rangle)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(U(|a0\rangle)+U(|b0\rangle))$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(|aa\rangle+|bb\rangle)$$

$$\neq\frac{1}{2}(|aa\rangle+|ab\rangle+|ba\rangle+|bb\rangle)=\frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle+|b\rangle)\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle+|b\rangle)$$

$$=|c\rangle\otimes|c\rangle=|cc\rangle=U(|c0\rangle)$$

Neexistuje

Důsledky no cloning

- konec kvantového pirátství
- z neznámého kvantového stavu opravdu nezískáme žádnou informaci navíc
- umožňuje kvantové šifrování

- existují transformace které některé stavy klonují (ale ne všechny)
- existují transformace které téměř klonují (vytvářejí kopie, ale ty nejsou přesné)
- existuje transformace realizující tzv. kvantovou teleportaci, což je prakticky klonování, ve kterém je originál zničen

Toffoli gate

- „Existuje univerzální quantum gate?“
  - obdoba NAND z klasické logiky
  - problém s reverzibilitou
  - Toffoliho brána (Controlled Not)
  - jakákoli binární funkce stavu QS se dá vyjádřit jako posloupnost Toffoliho bran

a	b	c	a‘	b‘	c‘
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

Hadamard Gate

- unární hradlo

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- převádí zcela určený stav na zcela neurčený (vzhledem k dané bázi)
- výsledek je zcela určený vzhledem k bázi nazývané Hadamardova (nebo též duální, značení s čárkou)
- dvojí aplikace Hadamardovy brány je negací vstupu (jeden bázový stav se změní na druhý)
  - proto též označována jako odmocnina z NOT
  - obecně ale neexistuje negující brána ve smyslu <f(x)|x>=0

Inverze okolo průměru

- n-vstupová brána
- provádí transformaci

$$\sum_{i=0}^{2^{n-1}} a_i |i\rangle \rightarrow \sum_{i=0}^{2^{n-1}} (2E - a_i)|i\rangle, E = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{2^{n-1}} a_i$$

- lze vyjádřit unitární maticí

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{2}{2^n} & \frac{2}{2^n} & \Lambda & \frac{2}{2^n} \\ \frac{2}{2^n} & 1-\frac{2}{2^n} & \Lambda & \frac{2}{2^n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ \frac{2}{2^n} & \frac{2}{2^n} & \Lambda & 1-\frac{2}{2^n} \end{pmatrix}$$

- nebo též jako kompozice $-H_n R_n {}^1H_n$

U_f

- definováno pro libovolnou binární funkci
- platí že existuje transformace

$$\left|x,b\right\rangle \xrightarrow{U_f} \left|x,b \oplus f(x)\right\rangle$$

- protože
  - transformace je reverzibilní
  - máme k dispozici Toffoli gate
- aplikujeme-li na superpozici vstupů, pak dostaneme superpozici výsledků (všechny najednou, hned)

V_f

- mějme funkci

$$f : \{0,1,\ldots,2^{n-1}\} \to \{0,1\}$$

- pak existuje transformace

$$|x\rangle \xrightarrow{V_f} (-1)^{f(x)}|x\rangle$$

  – není to na první pohled zřejmé, ale uvažme že platí

$$\left|x, \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right\rangle \xrightarrow{U_f} \frac{1}{\sqrt{2}}(|x, f(x)\rangle - |x, 1 \oplus f(x)\rangle) =$$

$$= (-1)^{f(x)}\left|x, \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right\rangle$$

Groverův hledací algoritmus (GS)

- úloha:
  - *Mějme diskrétní množinu možných hodnot x a funkci f(x) zobrazující každou z těchto hodnot do binární hodnoty. Najděme x takové, že f(x)=1.*
- mnoho úloh se dá na takovouto úlohu převést
- Groverův algoritmus umožňuje hledat v exponenciálně rozsáhlé množině v čase $O(n^{1/2})$

Groverův vyhledávací algoritmus

- postup:
  1. vytvoříme stav reprezentující všechny možné vstupy

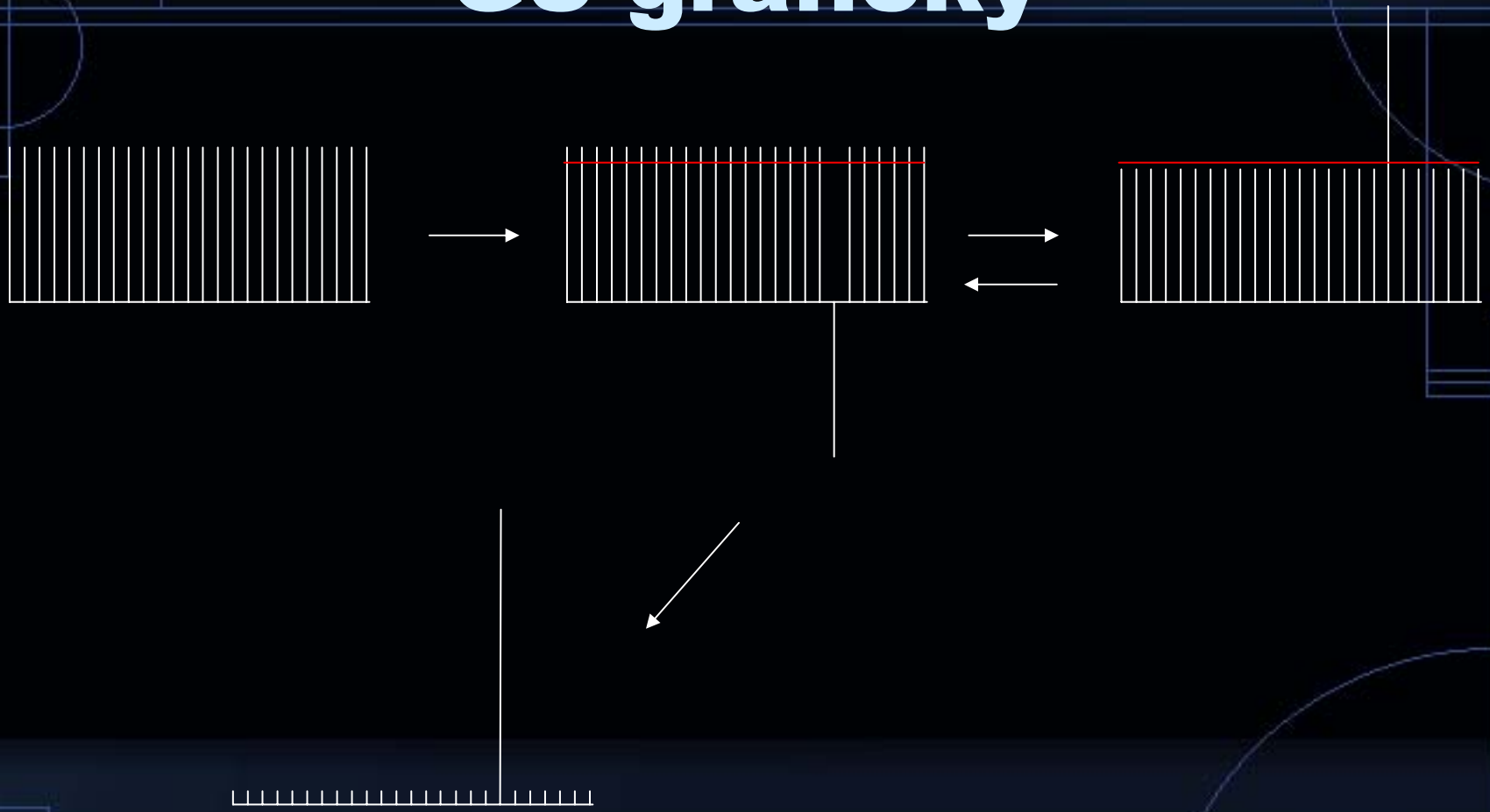
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle$$

  2. aplikujeme V_f
     - změna znaménka u hledaných vstupů
  3. aplikujeme inverzi okolo průměru
  4. opakujeme kroky 2-3 $\left\lceil \frac{\pi}{4}\sqrt{2^n} \right\rceil$ krát
  5. provedeme měření vzhledem ke standardní bázi
- tento iterativní proces se také nazývá amplifikace amplitudy

Intuitivní pohled na GS

- amplitudy stavů jsou na začátku kladná a stejně velká čísla
- amplituda hledaného stavu se aplikací V_f převrátí, tj. je záporná
- průměr je kladný
- převrácením okolo průměru se amplituda většiny stavů zmenší, ale amplituda hledaného stavu se zvětší
- funguje jenom dokud je průměr kladný!
  - tato podmínka platí právě $\frac{\pi}{4}\sqrt{2^n}$ krát
  - obvykle je třeba o iteraci míň/víc, tj. amplituda hledaného stavu není přesně jedničková

GS graficky



Kvantová radiozita s GS

- připravíme kvantové registry pro radiozity jednotlivých trojúhelníků (zcela neurčené)
- připravíme unitární matici, která z radiozit vypočítá zbytkovou energii v systému (suma absolutních reziduí v radiozitní matici)
- připravíme matici V_f pro funkci určující zda je reziduum nulové
- aplikujeme GS

Quantum SR s GS

1. vytvořit U_f pro odchylku při simulaci degradace
2. opakovat:
   1. zvolit práh chyby
   2. vytvořit V_f pro U_f<práh
   3. vytvořit Hadamard state reprezentující všechny možné obrazy
   4. amplifikovat amplitudy obrazů podle V_f
   5. provést projekci, eventuálně snížit práh

Shorův faktorizační algoritmus

- jeden z prvních kvantových algoritmů
- rozkládá čísla na součin
- běží v čase polynomiálním k logaritmu rozkládaného čísla
- konkrétní postup je netriviální (zahrnuje QFT – Quantum Fourier Transform)

- (není ovšem dokázáno že faktorizace je NPC problém – Shorův algoritmus nedokazuje že kvantové stroje dokáží řešit NPC úlohy)

Kvantové šifrování

- Shorův algoritmus je vážnou hrozbou pro asymetrické šifry s veřejným klíčem
  - založeny na předpokladu že neexistuje polynomiální faktorizační algoritmus
- quantum computing ale poskytuje jiné prostředky zabezpečení přenosu poskytující bezpečnost založenou na zatím nevyvrácených přírodních zákonech
- QKG je prakticky vyzkoušený postup (polarizovaný laser v optickém vlákně)

Šifrování tajným klíčem

- jedna z nejjednodušších šifer
- pokud je zaručeno zcela náhodné generování klíče, který je stejně dlouhý jako zpráva a který není použit více než jednou, pak je zaručena úplná bezpečnost.
- binární verze

$$c = m \oplus k, m = c \oplus k$$

- problém – generování a distribuce klíče

QKG Benetta a Brassarda

- **A**lice chce poslat **B**obovi zprávu
  - je třeba vygenerovat a přenést klíč
- Alice vygeneruje dvě náhodné sekvence
- Alice zakóduje bit z první sekvence ve standardní nebo duální bázi, podle bitu z druhé sekvence

$$0,0 \rightarrow |0\rangle; 1,0 \rightarrow |1\rangle$$

$$0,1 \rightarrow |0'\rangle; 1,1 \rightarrow |1'\rangle$$

  - neortogonální stavy
  - neexistuje measurable který je spolehlivě odliší

QKG

- Bob vygeneruje také náhodnou sekvenci, podle které volí measurable
  - pokud zvolí bázi odpovídající kódování, pak dostane právě hodnotu bitu
  - pokud zvolí nesprávnou bázi, pak je pravděpodobnost správné hodnoty ½
- Bob zveřejní jaké použil báze

  (nikoli co naměřil)
- Alice mu odpoví v kterých případech zvolil správnou bázi
- sekvence hodnot naměřených se správnou bází je klíčem
  - je nutno provést test konzistence klíče

QKG - příklad

Alicina sekvence	0	1	0	1	0	1	0	1
Alicina kódovací sekvence	0	0	1	1	0	0	1	1
Odeslaný stav	|0>	|1>	|0'>	|1'>	|0>	|1>	|0'>	|1'>
Bobova měřící sekvence	0	0	0	0	1	1	1	1
Výsledek Bobova měření	0	1	R	R	R	R	0	1

Lámání QKG

- eavesdroper Eve
- nemůže provádět měření, protože zvolením špatné báze by změnila výsledek Bobova měření
  - Bob a Alice by neměli shodný klíč
  - při testovací fázi by se na to přišlo
- nemůže si udělat kopii sekvence, protože stavy není možno klonovat

Zdroje

- Andrew Glassner
  Andrew Glassner's Notebook
  Quantum Computing, Part 1-3,
  July-December 2001

- Josef Gruska
  Quantum Computing,
  McGraw-Hill Publishing Company, 1999

- John Preskill
  Lecture Notes for Physics 229
  Quantum Information and Computation,
  California Institute of Technology, September 1998

Děkuji za pozornost